

Recasages possibles : 104, 106, 156

Référence : Oraux X-ens, Algèbre 2, FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS (p. 117-119, 171-172).

Développement

Lemme 1 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k) = 0$.

Théorème 2 (Burnside) Si G est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, *i.e* tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$, alors G est fini.

- *Preuve du Lemme 1* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrons le lemme par double implication :

(\Rightarrow) : Supposons A nilpotente. Alors, son polynôme minimal est de la forme $\mu_A(X) = X^p$ pour un entier $p \geq 1$. Il est donc scindé et A est trigonalisable, *i.e* il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. Or les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A , c'est-à-dire les racines de μ_A , et donc ils sont nuls. La trace vérifiant la relation fondamentale $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, on a

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PTP^{-1}) = \text{Tr}(TP^{-1}P) = \text{Tr}(T) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque $A^p = 0$, on a $(A^k)^p = (A^p)^k = 0^k = 0$, donc la matrice A^k est aussi nilpotente, et donc $\text{Tr}(A^k) = 0$ par ce qui précède.

(\Leftarrow) : On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k) = 0$, alors A est nilpotente.

- Si $n = 1$, alors $\text{Tr}(A) = 0 \Rightarrow A = 0$ donc A est bien nilpotente.
- Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On suppose la propriété $\mathcal{P}(i)$ vraie pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k) = 0$. Écrivons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0$, soit

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0.$$

En prenant la trace dans cette égalité, et en utilisant la propriété vérifiée par A , on obtient $\text{Tr}(a_0I_n) = na_0 = 0$, d'où $a_0 = 0$ puisque \mathbb{C} est de

caractéristique nulle. Ainsi, on voit que χ_A se factorise par X , *i.e* 0 est racine de χ_A . Soit $p \geq 1$ la valuation X -adique de χ_A et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\chi_A = X^pQ$, de sorte que $Q(0) \neq 0$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(\chi_A(A)) = \text{Ker}(A^p) \oplus \text{Ker}(Q(A)).$$

On veut montrer $\text{Ker}(Q(A)) = \{0\}$; supposons que $\text{Ker}(Q(A)) \neq \{0\}$. Fixons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ une base de \mathbb{C}^n adaptée à la décomposition ci-dessus. Les sous-espaces en présence sont des noyaux de polynômes en A , donc sont stables par l'endomorphisme m_A de \mathbb{C}^n de multiplication par A . Ainsi, la matrice dans la base \mathcal{B} de m_A est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Notant m_1 l'endomorphisme de $\text{Ker}(A^p)$ induit par m_A , on sait que A' est la matrice de m_1 dans la base \mathcal{B}_1 . Or, m_1 est clairement nilpotent car si $x \in \text{Ker}(A^p)$, alors $m_1^p(x) = A^p x = 0$ donc $m_1^p = 0$. Ainsi, A' est nilpotente (comme matrice d'un endomorphisme nilpotent) et par l'implication directe précédemment montrée, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A'^k) = 0$. Or, le calcul matriciel par blocs donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$M^k = \begin{pmatrix} A'^k & 0 \\ 0 & B'^k \end{pmatrix}.$$

De plus, comme A et M sont semblables (car matrices d'un même endomorphisme, en l'occurrence m_A) les matrices A^k et M^k sont aussi semblables, et donc $\text{Tr}(M^k) = \text{Tr}(A^k) = 0$. En utilisant

$$0 = \text{Tr}(M^k) = \text{Tr}(A'^k) + \text{Tr}(B'^k) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(A'^k) = 0,$$

on voit que $\text{Tr}(B'^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme B' est de taille $\leq n-1$, puisque $\text{Ker}(A^p) \neq \{0\}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et obtenir que B' est nilpotente. Or, notant m_2 l'endomorphisme de $\text{Ker}(Q(A))$ induit par m_A , on a

$$\text{Ker}(m_2) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(Q(A)) \subset \text{Ker}(A^p) \cap \text{Ker}(Q(A)) = \{0\}.$$

Par conséquent m_2 est injectif, donc c'est un automorphisme, et comme $B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(m_2)$, la matrice B' est inversible. Ceci contredit le fait que B' est nilpotente, d'où le fait que $\text{Ker}(Q(A)) = \{0\}$. Finalement, on a $\text{Ker}(A^p) = \mathbb{C}^n$, *i.e* $A^p = 0$, c'est-à-dire A nilpotente, ce qui termine la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2* : Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N . Remarquons tout d'abord que puisque toute matrice $A \in G$ vérifie $A^N = I_n$, A est annihilée par le polynôme $X^N - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Ce polynôme étant scindé à racines simples, tout élément A de G est diagonalisable, avec spectre inclu dans l'ensemble des racines N -ièmes de l'unité. On note alors X l'ensemble des traces d'éléments de G . Comme l'ensemble des racines N -ièmes de l'unité est fini, l'ensemble X est fini, car la trace d'une matrice complexe est la somme des ses valeurs propres. Notons enfin m la dimension du sous-espace $\text{Vect}(G)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et fixons $(M_1, \dots, M_m) \in G^m$ une base de $\text{Vect}(G)$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} G & \longrightarrow & X^m \\ A & \longmapsto & (\text{Tr}(AM_1), \dots, \text{Tr}(AM_m)). \end{cases}$$

Comme X est fini, X^m aussi et donc il suffit de montrer que f est injective pour conclure. Soient donc $A, B \in G$ telles que $f(A) = f(B)$, *i.e* telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \text{Tr}(AM_i) = \text{Tr}(BM_i).$$

On va montrer que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente et diagonalisable, ce qui permettra de conclure. La diagonalisabilité est assez simple à obtenir puisque $AB^{-1} \in G$ donc est diagonalisable par les arguments précédent. Il existe donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que

$$AB^{-1} = PDP^{-1}$$

Ceci implique que $AB^{-1} - I_n = PDP^{-1} - I_n = P(D - I_n)P^{-1}$. Or, $D - I_n$ est clairement diagonale, donc $AB^{-1} - I_n$ est bien diagonalisable. Montrons maintenant que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente. Par linéarité de la trace, comme (M_1, \dots, M_m) engendre $\text{Vect}(G)$, on a pour tout $M \in \text{Vect}(G)$, $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$. C'est en particulier vrai pour tout $M \in G$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, en notant $C = AB^{-1}$ on a

$$\text{Tr}(C^k) = \text{Tr}(AB^{-1}C^{k-1}) = \text{Tr}(BB^{-1}C^{k-1}) = \text{Tr}(C^{k-1})$$

car $B^{-1}C^{k-1} \in G$. Par récurrence immédiate, on obtient $\text{Tr}(C^k) = \text{Tr}(I_n) = n$ (et ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$). Or, comme C et I_n commutent, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}((C - I_n)^k) &= \text{Tr}\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} C^j\right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \text{Tr}(C^j) \\ &= n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} = n(1 - 1)^k = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le **Lemme 1**, $C - I_n = AB^{-1} - I_n$ est nilpotente, et donc nulle car également diagonalisable. Ainsi, $A = B$ et f est injective, ce qui permet de conclure que G est fini, ce qui achève la preuve du **Théorème 2** dit de *Burnside*.